EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES ET APPLICATIONS

ANALYSE MATHEMATIQUE,
MODELES ET SIMULATIONS NUMERIQUES

1. EXEMPLES d'applications

2. MODELES ET Equations aux Dérivées Partielles

3. TENDANCES ET PERSPECTIVES

2. MODÈLES et Equations aux Dérivées Partielles

2.1 GÉNÉRALITÉS

- Omniprésence des simulations numériques pour l'étude et la compréhension du "réel" (sciences et technologies).

- Les simulations reposent sur des modèles mathématiques.

- Ces modèles sont le plus souvent des Equations aux Dérivées Partielles (EDP) non-linéaires.

  EDP : un ensemble de relations liant
  les dérivées (partielles) d'une fonction.

2.2 RAPPELS

- Notions mathématiques élémentaires mais

- dérivées et fonctions : évolution historique

- Leibniz(Newton) $\longrightarrow$ $\begin{array}{c}\text{calcul différentiel}\\ \text{XIX}^{\text{e}}\text{siècle}\end{array}$

  pourtant l'étude des EDP après avoir suscité de célèbres controverses (équation des ondes, équation de la chaleur et séries de Fourier) ou erreurs (ondes de choc et Riemann) rend nécessaire l'introduction d'autres notions au XX^e siècle.

  Sobolev, Leray : espaces de Sobolev

  Schwartz : théorie des distributions.

2.3 L'exemple de la MÉCANIQUE DES FLUIDES et de la DYNAMIQUE DES GAZ

- EULER (1755) : dans le cas d'un fluide incompressible

  $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u + \nabla p = 0 & (u \text{ vitesse}) \\ div\ u = 0 & (p \text{ pression } - \text{hydrostatique} -) \end{cases}$$

  mais paradoxe de d'Alembert (1752).

- NAVIER (1822) - STOKES (1845) : friction-viscosité

  $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u - \nu \Delta u + \nabla p = 0 \\ div\ u = 0 \end{cases}$$

- BOLTZMANN (1872) [MAXWELL (1866)]: écoulements raréfiés

- L'histoire continue à partir de ces "briques" pour modéliser des fluides (ou des situations faisant intervenir des fluides) de plus en plus complexes

- Les applications, grâce aux simulations numériques se multiplient : aérodynamique, météorologie, géophysique, écoulements sanguins, flots de polymères, effets spéciaux, trafic routier...

2.4 QUELQUES NOTIONS

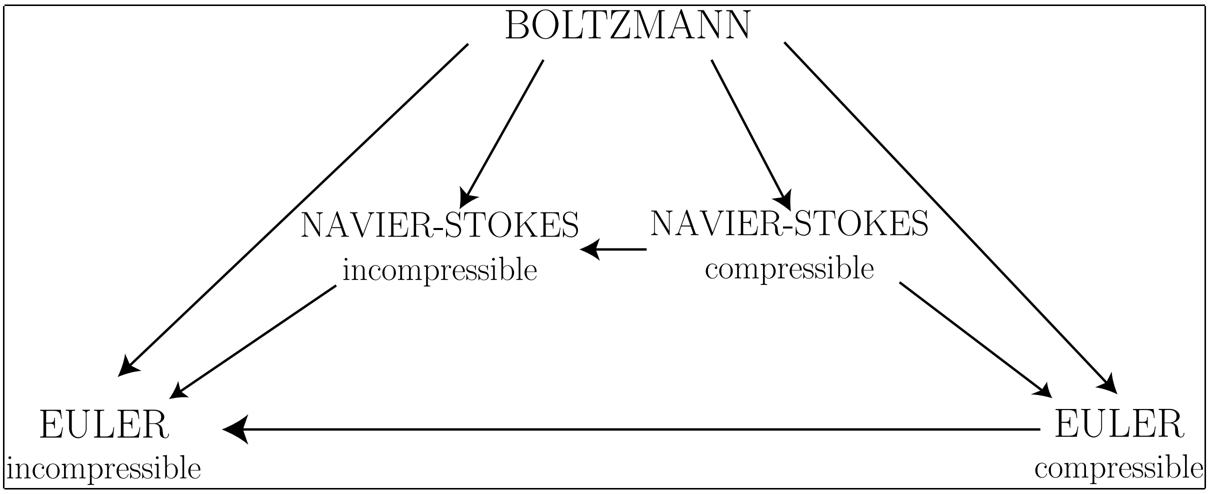
- description "moyenne" d'un grand nombre de "particules" en "interaction" (Mécanique, Physique mais aussi, par exemple, le traitement d'images, la finance, l'étude du trafic routier...)

- les modèles réalistes sont le plus souvent NONLINEAIRES (principes fondamentaux/ invariances, lois constitutives, effets de moyennes (champ moyen))

- Notion d'ECHELLE : un modèle n'a de sens qu'à une certaine échelle

- Questions fondamentales du <u>passage d'une échelle à l'autre</u> ou du <u>couplage</u> <u>d'échelles</u>

(exemple : rentrée atmosphérique, gaz raréfié
$\rightarrow$ gaz classique, programme de Hilbert)



- Systèmes complexes et couplage de modèles:

  exemples : aéroacoustique, aéroélasticité, océan-atmosphère, flots sanguins ("parois élastiques"), Magnéto-hydrodynamique, Interactions laser-plasmas ...

Les EDP nonlinéaires permettent de décrire de multiples situations concrètes à une certaine échelle, en étudiant le comportement moyen d'un grand nombre de "particules". Même si les notions mathématiques sont élémentaires, leur histoire montre qu'il convient de s'attacher à la notion même de solutions.

2.5 ANALYSE MATHÉMATIQUE/ SIMULATIONS

- l'analyse permet parfois de "valider" les modèles et les simulations

- les progrès vont de conserve (lois de conservation, Boltzmann...)

- l'analyse est requise pour la discrétisation et les algorithmes

  exemple (très simple)

  $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ de solution $u = u_0(x+t))$

  discrétisation : pas de temps Δt, pas d'espace Δx

$$u_k^n \simeq u(n\Delta t,\ k\Delta x)$$

algorithme : dérivée $\approx$ taux de variation

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} = \frac{u_k^n - u_{k-1}^n}{\Delta x}$$

ou

$$\frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{\Delta x}$$

ou

$$\frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2\Delta x}$$

- danger de simulations “aveugles” sans analyse surtout pour des applications complexes (couplages ...).

- MAIS l'analyse peut être très difficile

  exemple : Navier-Stokes incompressible (3d), 1933 : J. Leray, existence d'une solution d'énergie finie,

? formation d'une singularité ? (1 des 7 prix Clay)

3. TENDANCES ET PERSPECTIVES

3.1 TENDANCES EN ANALYSE

- Découvrir des notions et des outils, qui font appel à des branches très variées des Mathématiques.

- Deux tendances

A. Notions de solutions

B. Analyse de familles de solutions

A. Souvent délicat en raison

- du manque d' "informations" (invariances et estimées a priori)

- des chocs/discontinuités/singularités/instabilités

Exemple : Burgers $\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$

- principe général : transformer des propriétés attendues des solutions en notions...

Sobolev-Leray, distributions, solutions entropiques,

formulations cinétiques, solutions de viscosité, solutions renormalisées

B. Analyse de famille de solutions

par opposition à “une” solution individuelle, pour

- construire des solutions
- analyser la stabilité (et identifier les blocs structurants des modèles)
- valider les simulations numériques (analyse numérique)
- analyser les problèmes asymptotiques (passage d’une échelle à l’autre...)

3.2 TENDANCES ET MODÉLISATION

- modèles couplés (couplages physiques, couplages numériques, couplages d'échelles...)

- EDP nonlinéaires avec des termes stochastiques ou statistiques pour des phénomènes complexes, instables ou couplant des échelles très différentes

  (cours sur l'homogénéisation stochastique)

  exemples : transport turbulent, milieux poreux, polymères, matériaux, évaluation de réseaux, applications à la biologie (?)