

Une fréquence peut-elle être instantanée ?

Patrick Flandrin

CNRS & École Normale Supérieure de Lyon



Collège de France @ Sophia-Antipolis, 22 janvier 2014

Ordre et désordre

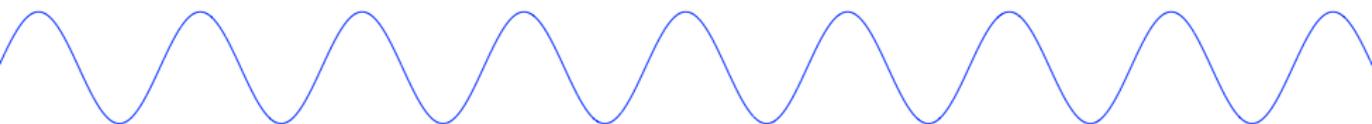
Rythmes, cycles et oscillations un peu partout

- astronomie (planètes, comètes, éclipses, marées, ...)
- climat (saisonnalités, crues, ...)
- électromagnétisme (optique, radio, ...)
- mécanique (moteurs, turbines, machines tournantes, ...)
- acoustique (parole, musique, ...)
- biologie (système nerveux autonome, rythmes circadiens, ondes cérébrales, ...)

Mais aussi

- bruits (turbulence, fluctuations thermiques, boursières, ...)
- événements fugitifs (séismes, tsunamis, explosions, ...)
- formes irrégulières

Sinus et cosinus



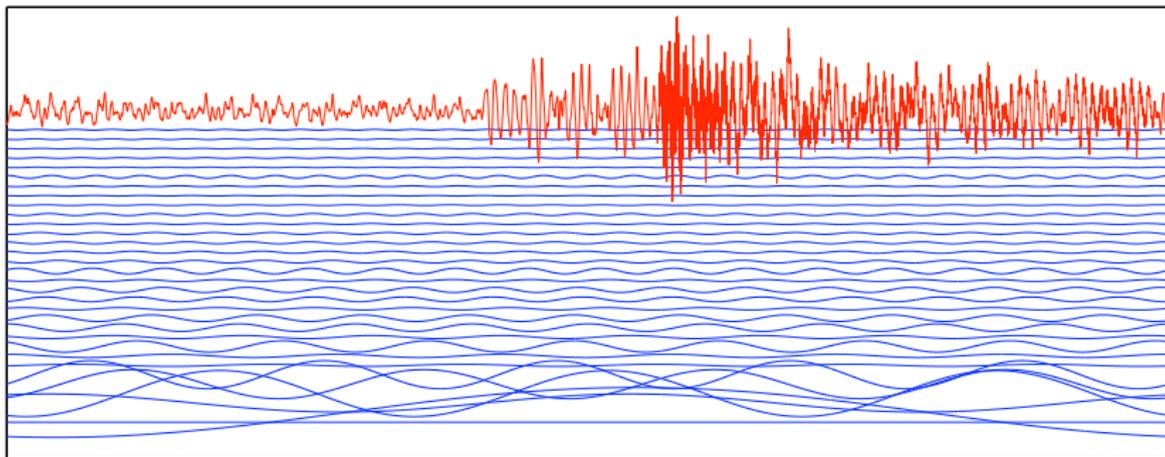
3 paramètres pour décrire une oscillation harmonique

- 1 amplitude
- 2 fréquence
- 3 phase

3 conséquences

- 1 amplitude constante \Rightarrow oscillation **éternelle**
- 2 fréquence fixe \Rightarrow onde **monochromatique**
- 3 phase libre \Rightarrow **référence** d'origine des temps

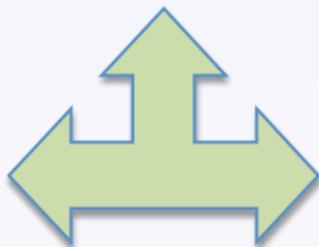
Un exemple



200 ans de succès

« **physique** »

(équation de la chaleur)



« **mathématiques** »

(analyse harmonique)

« **informatique** »

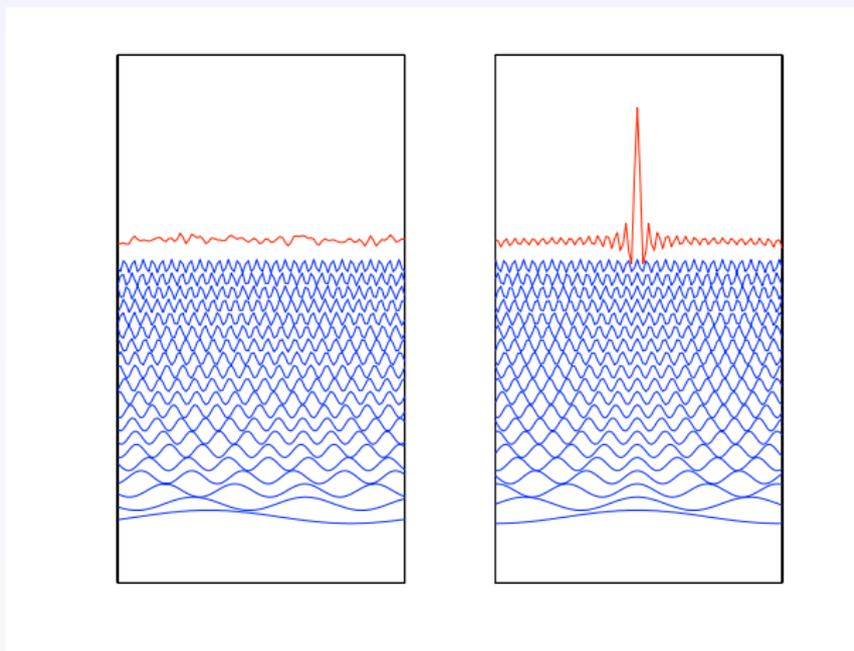
(Transformée de Fourier Rapide)

Physique vs. mathématique (1)

The image shows a musical score for piano, marked "Lent" with a tempo of quarter note = 58. The score is written for a grand piano, with a treble clef on the right hand and a bass clef on the left hand. A specific note in the right hand is highlighted with a dashed box and the number "8", indicating its frequency analysis. The score includes various musical notations such as slurs, accents, and dynamic markings like "Red.", "ff", and "mf".

J. Ville (1948) : « Si nous considérons en effet un morceau [de musique] contenant plusieurs mesures (ce qui est le moins qu'on puisse demander) et qu'une note, la par exemple, figure une fois dans le morceau, l'analyse harmonique [de Fourier] nous présentera la fréquence correspondante avec une certaine amplitude et une certaine phase, sans localiser le la dans le temps. Or, il est évident qu'au cours du morceau il est des instants où l'on n'entend pas le la. La représentation est néanmoins mathématiquement correcte, parce que les phases des notes voisines du la sont agencées de manière à détruire cette note par interférence lorsqu'on ne l'entend pas et à la renforcer, également par interférence, lorsqu'on l'entend ; mais s'il y a dans cette conception une habileté qui honore l'analyse mathématique, il ne faut pas se dissimuler qu'il y a également une défiguration de la réalité : en effet, quand on n'entend pas le la, la raison véritable est que le la n'est pas émis. »

Interprétation



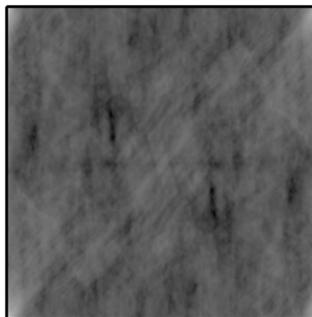
L. de Broglie (1966) : « La considération exclusive des ondes monochromatiques conduit à une autre conception qui me paraît erronée. Si l'on considère une grandeur qui peut être représentée, à la manière de Fourier, par une superposition de composantes monochromatiques, c'est la superposition qui a un sens physique et non les composantes de Fourier considérées isolément. »

Reconstruction

module + phase



module seul



phase seule



module + phase

module seul

phase seule

Pendule simple

Effet Doppler

Effet Doppler

Physique vs. mathématique (2)

Observation

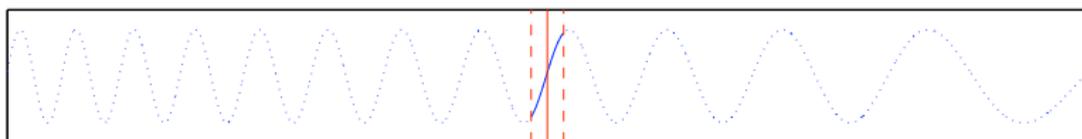
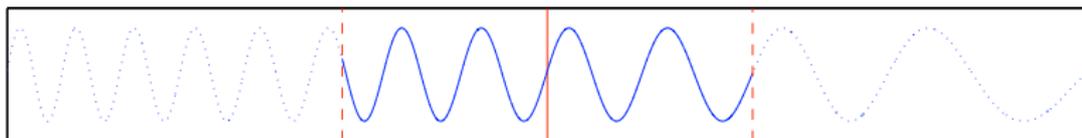
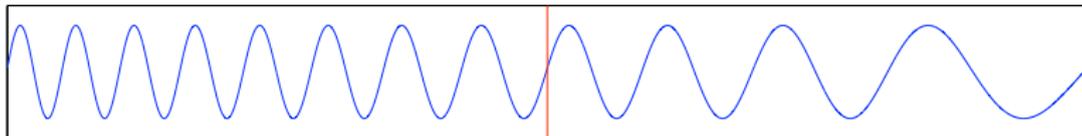
Contradiction apparente entre

- 1 l'**intuition physique** d'une fréquence qui peut être perçue comme "instantanée"
- 2 sa **définition mathématique** qui repose sur une permanence d'oscillation excluant toute forme de "localité" temporelle

2 questions

- 1 une **fréquence** peut-elle être **instantanée** ?
- 2 "**instantané** $\stackrel{?}{=} \text{local}$ "

“Instantané = local”



Heisenberg (classique)

Dispersion individuelles

Mesures de **second ordre** (variance ou inertie) en temps et fréquence pour un signal $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$ de spectre $X(\omega)$:

$$\Delta_t^2(x) := \frac{1}{E_x} \int t^2 |x(t)|^2 dt \quad ; \quad \Delta_\omega^2(X) := \frac{1}{E_x} \int \omega^2 |X(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}$$

Théorème [Weyl, 1927][Gabor, 1946]

$$\Delta_t(x) \Delta_\omega(X) \geq \frac{1}{2},$$

borne atteinte par les **signaux gaussiens** $x_*(t) = C e^{\alpha t^2}$, $\alpha < 0$
("logons")

Incertitude ?

Terminologie

- Ni “principe” ni “incertitude” [Lévy-Leblond, 1974]
- Variables canoniquement conjuguées (Fourier)
- Mécanique quantique \leftrightarrow position-impulsion
Traitement du signal \leftrightarrow temps-fréquence

Faire de nécessité vertu

- Contrainte \Rightarrow limitation de description et de localisation conjointe (pas de localisation **ponctuelle**)
- Redondance \Rightarrow noyau reproduisant, **échantillonnage**, ...

“Instantané \neq local”

Signal analytique [Ville, 1948]

- **Principe** : voir la fréquence comme liée à la **vitesse** de rotation d'un **vecteur tournant** (définition *a priori*)
- **Réalisation** : construire le vecteur tournant en adjoignant à l'oscillation à valeurs réelles une **composante imaginaire** “en quadrature”
- **Quadrature** : filtre de Hilbert **non local**, à décroissance lente !

Interprétation

Accès à une propriété **instantanée** *via* une transformation **globale**

Fréquence fixe

Fréquence variable

Heisenberg (précisé)

Théorème [Schrödinger, 1930]

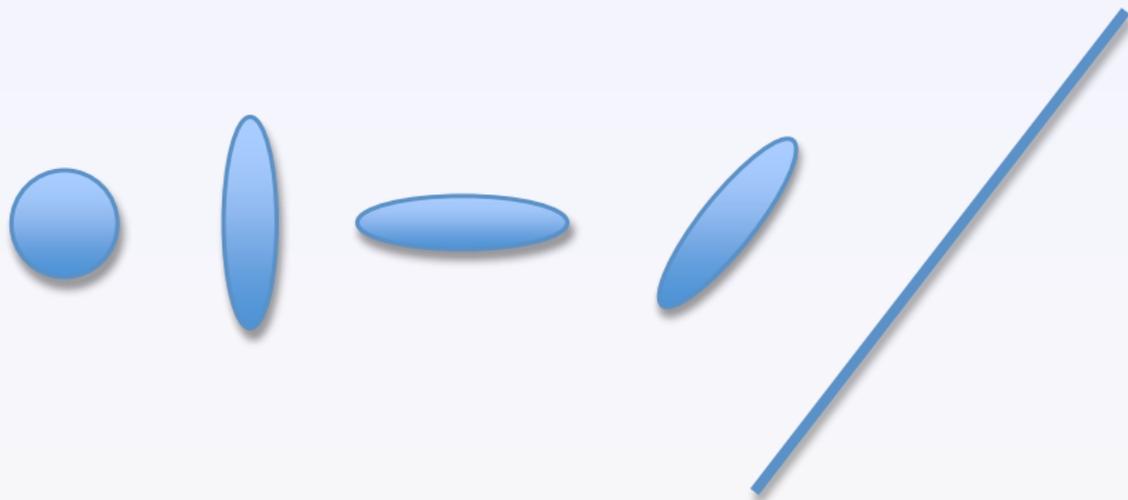
$$\Delta_t(x) \Delta_\omega(X) \geq \frac{1}{2} \sqrt{1 + c^2(x)},$$

avec $c(x) = \int t \omega_x(t) a_x^2(t) dt$ une mesure du **couplage** entre le temps et la fréquence, la borne étant atteinte pour les **signaux gaussiens généralisés** $x_*(t) = e^{\alpha t^2 + \beta t + \gamma}$, $Re\{\alpha\} < 0$

Interprétation

- x_* : états comprimés (“squeezed states”) en mécanique quantique et “**chirps**” linéaires en théorie du signal
- possibilité de localisation d'énergie dans le plan **au-delà** de la concentration ponctuelle

Au-delà de la localisation ponctuelle



Réconcilier local et global

Idée

Formaliser l'intuition d'une **portée mathématique** en passant de "temps **ou** fréquence" (Fourier) à "temps **et** fréquence" (Wigner, Gabor, ondelettes, . . .)

Avantage

- "offrir" à un signal **2 degrés de liberté** pour déployer son énergie dans un plan
- le décrire par la structuration de sa **localisation** énergétique

Conséquence

- fréquences instantanées = **trajectoires** dans le plan
- définition **a posteriori** comme moments, points fixes ou invariants géométriques de transformations

Heisenberg (temps-fréquence)

Dispersion conjointe

Mesure de **second ordre** pour une distribution d'énergie $C_x(t, \omega; \varphi)$ dans la classe de Cohen :

$$\Delta_{t\omega}(C_x) := \frac{1}{E_x} \iint \left(\frac{t^2}{T^2} + T^2 \omega^2 \right) C_x(t, \omega; \varphi) dt \frac{d\omega}{2\pi}$$

Théorème [Janssen, 1991]

$$\text{Wigner} \Rightarrow \Delta_{t\omega}(W_x) \geq 1$$

$$\text{Spectrogramme} \Rightarrow \Delta_{t\omega}(S_x^h) \geq 2,$$

borne atteinte par les **signaux gaussiens** (et les **fenêtres gaussiennes adaptées**)

Localisation effective

Wigner

$$W_x(t, \omega) = \int x(t + \tau/2)x^*(t - \tau/2)e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$\lim_{\text{Re}\{\alpha\} \rightarrow 0_-} W_{x^*}(t, \omega) = \delta(\omega - (\beta + 2 \text{Im}\{\alpha\}t))$$

Généralisations

Localisation sur des courbes “**arbitraires**” du plan par modification des règles de symétrie centrale attachées à la distribution de Wigner [Gonçalvès & F., 1996]

- **Problème** : localisation **spécifique** et pour les seuls **signaux monocomposantes**
- **Alternative** : **réallocation**

Réallocation

Retour sur le spectrogramme

$$F_x^h(t, \omega) := \int x(s) h^*(s-t) e^{-i\omega s} ds$$

$$S_x^h(t, \omega) := \left| F_x^h(t, \omega) \right|^2 = \iint W_x(s, \xi) W_h(s-t, \xi - \omega) dt \frac{d\omega}{2\pi}$$

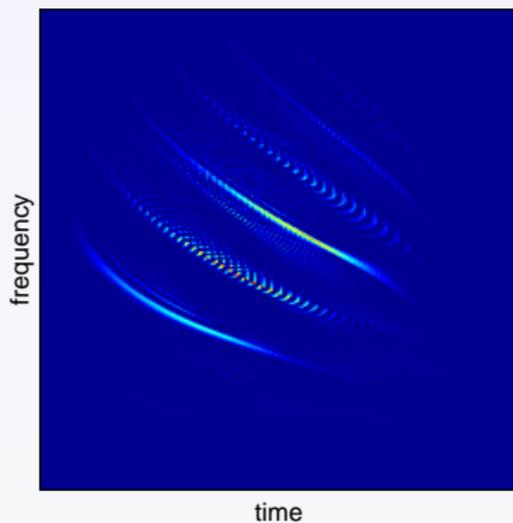
Principe [Kodera *et al.*, 1976][Auger & F., 1995]

- 1 Remplacer le centre **géométrique** du domaine TF de lissage (W_h) par le **centre gravité** local de W_x
- 2 **Réalouer** S_x^h à ce centre de gravité:

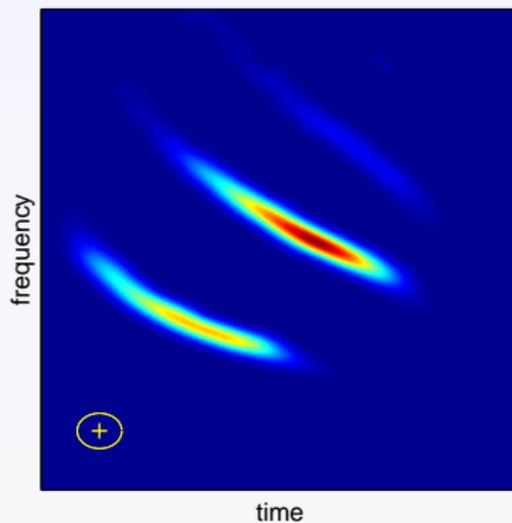
$$\hat{S}_x^h(t, \omega) = \iint S_x^h(\tau, \xi) \delta \left(t - \hat{t}_x(\tau, \xi), \omega - \hat{\omega}_x(\tau, \xi) \right) d\tau \frac{d\xi}{2\pi}$$

Spectrogramme = Wigner lissé

Wigner-Ville

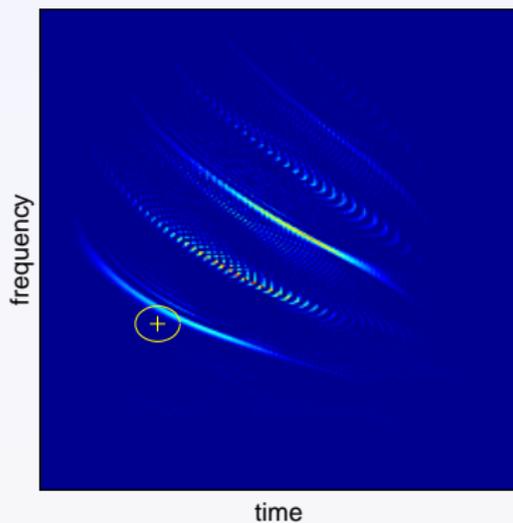


spectrogram

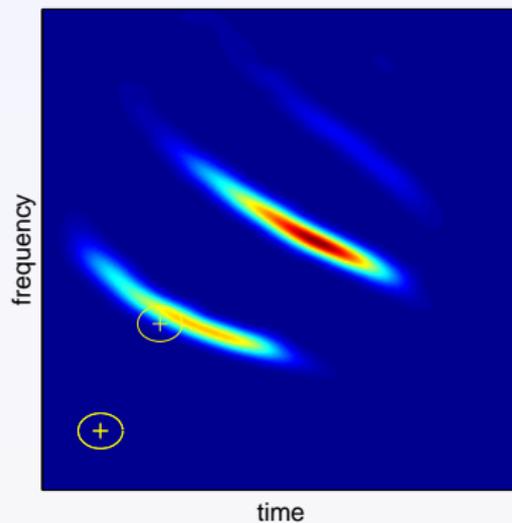


Étalement des “auto-terms”

Wigner-Ville

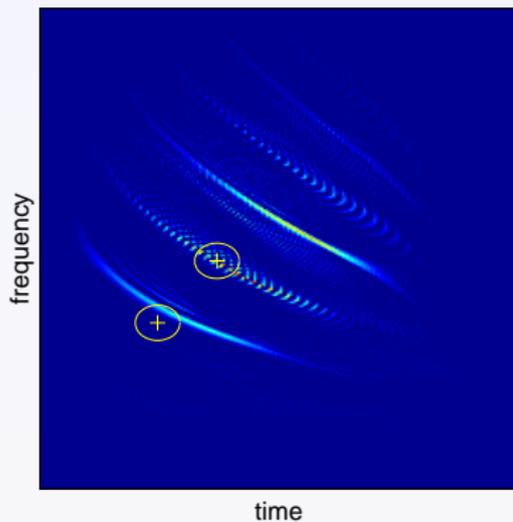


spectrogram

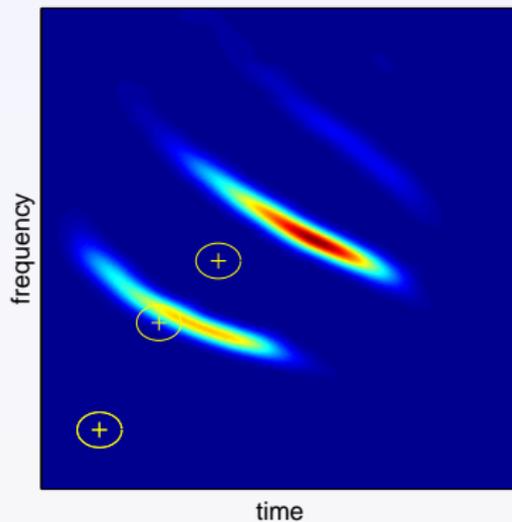


Suppression des “cross-terms”

Wigner-Ville

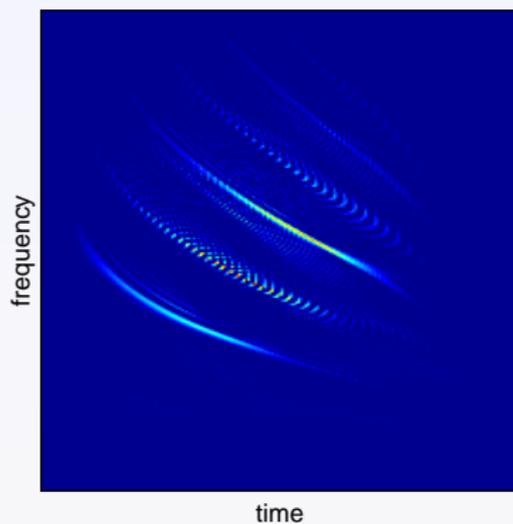


spectrogram

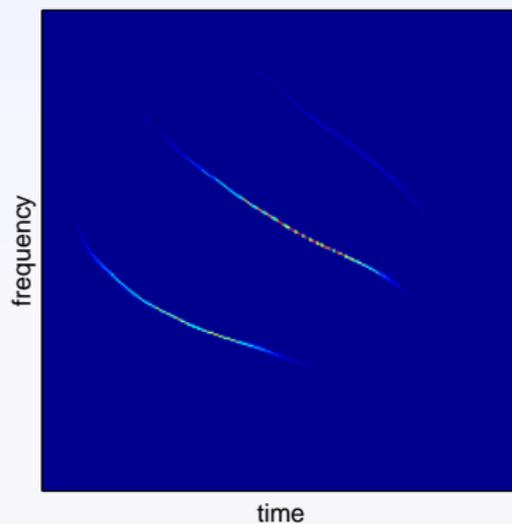


Réallocation

Wigner-Ville



reassigned spectrogram



En pratique

Algorithmes

- **Spectrogramme** : calcul **implicite** des centres de gravité locaux via 2 TFCTs additionnelles de fenêtres
 $(Th)(t) = t h(t)$ et $(Dh)(t) = (dh/dt)(t)$ [Auger & F., 1995]
- **Spectrogramme gaussien** : calcul **alternatif** des centres de gravité locaux via le seul module de la STFT [Auger, Chassande-Mottin & F., 2012]
- **Au-delà du spectrogramme** : **généralisations** possibles à d'autres lissages (pseudo-Wigner lissés, scalogramme, etc.)
- **Matlab** : tftb.nongnu.org

Localisation théorique

Analyse

Fenêtre gaussienne “circulaire” $h(t) = \pi^{-1/4} e^{-t^2/2}$

Chirps linéaires

$$\alpha = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{T^2} - i a \right) ; \quad \beta = 0$$

Fonctions d'Hermite

$$h_k(t) = C_{k-1} \frac{1}{\sqrt{T}} H_{k-1}(\sqrt{2\pi} t/T) e^{-\pi(t/T)^2},$$

avec

$$H_n(\alpha) = (-1)^n e^{\alpha^2} \frac{d^n}{d\alpha^n} e^{-\alpha^2}, \quad n = 0, 1$$

Localisation théorique

Proposition [Auger & F., 1995]

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{S}_x^h(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \delta(\omega - at)$$

Proposition [F, 2012]

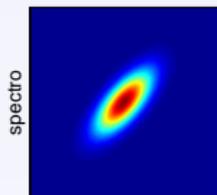
$$\hat{S}_{h_k}^{(g)}(t, \omega) = \frac{1}{2^{k-1}(k-1)!} \hat{V} \left(\sqrt{t^2 + \omega^2} \right) \mathbf{1}_{\mathcal{D}}(t, \omega),$$

avec $\hat{V} \neq \delta$ et

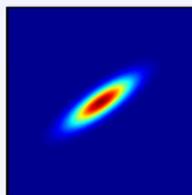
$$\mathcal{D} = \{(t, \omega) \mid t^2 + \omega^2 \geq t_m^2 + \omega_m^2 = 2(k-1)\}$$

$$\hat{S}_{h_k}^{(g)}(t, \omega) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \delta(t^2 + \omega^2 - 2(k-1))$$

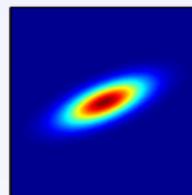
Chirps



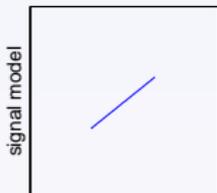
window = 21



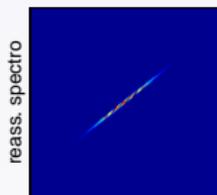
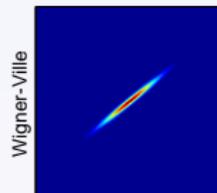
63



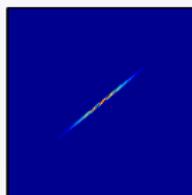
127 points



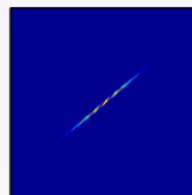
128 points



window = 21



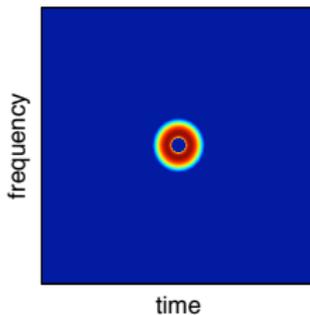
63



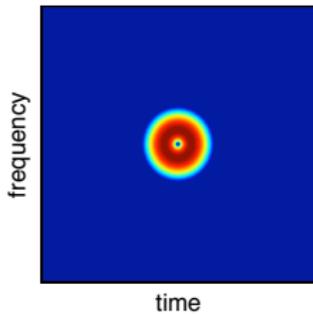
127 points

Hermite

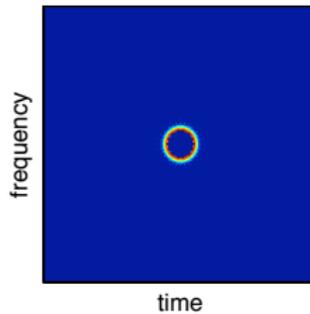
M = 2 – Wigner



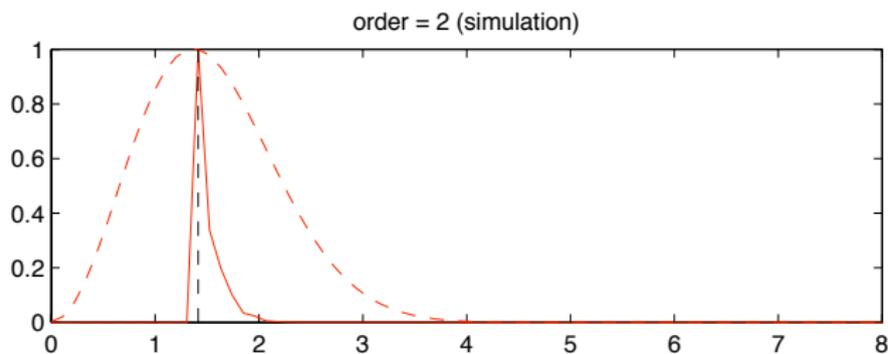
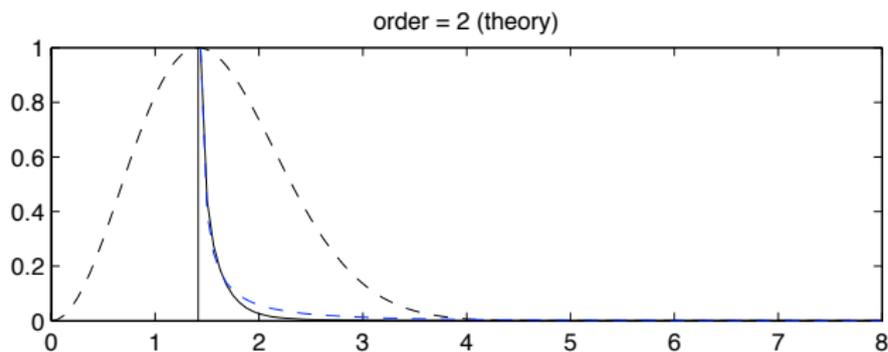
spectro.



reass. spectro.

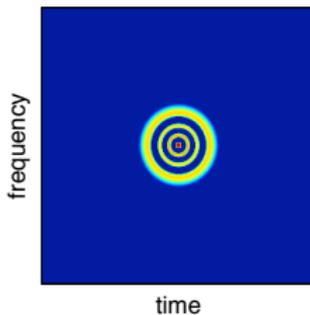


Hermite

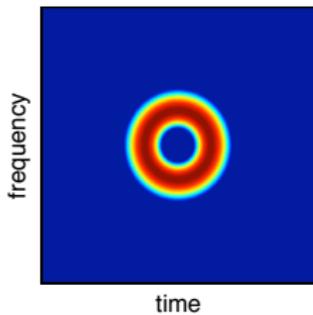


Hermite

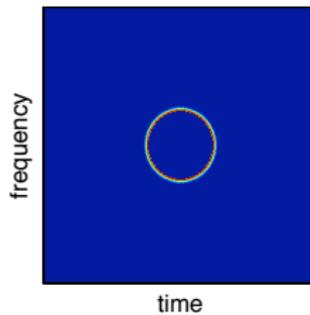
M = 7 – Wigner



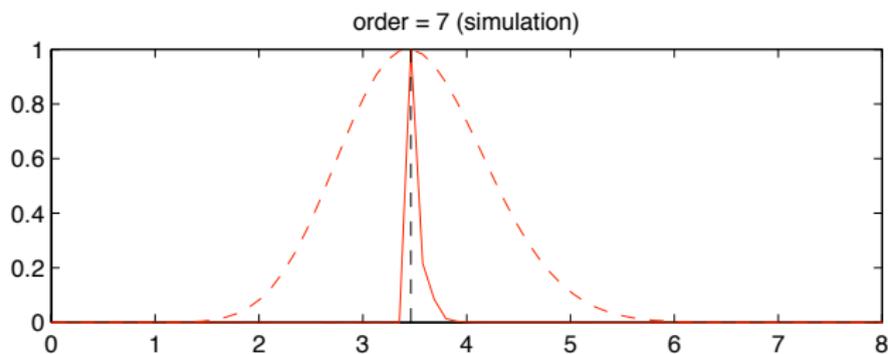
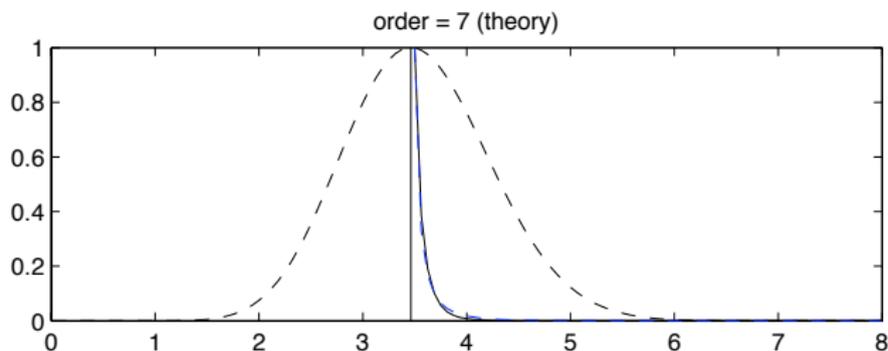
spectro.



reass. spectro.

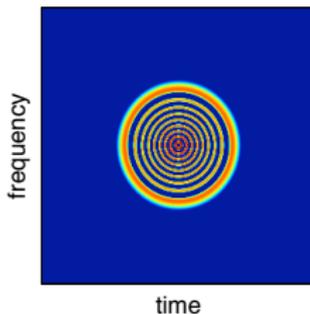


Hermite

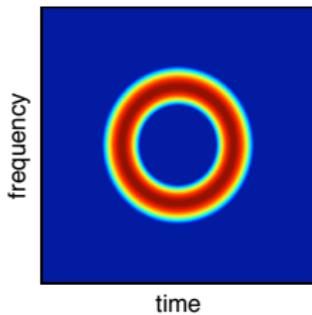


Hermite

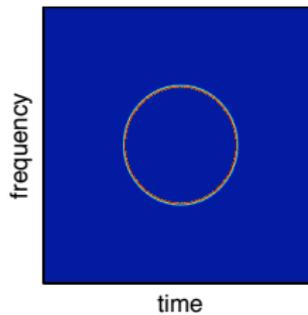
M = 18 – Wigner



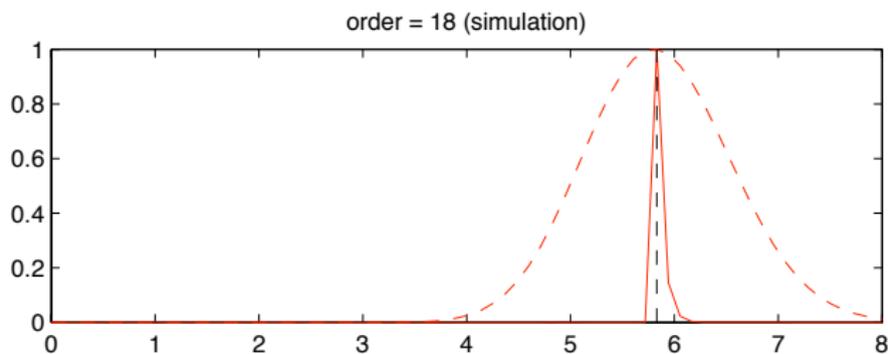
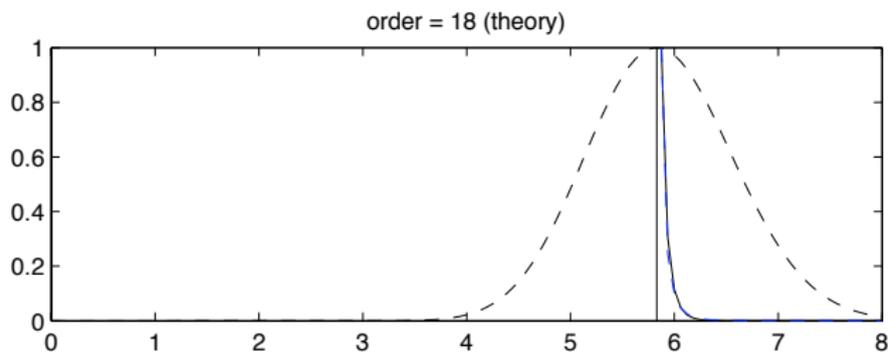
spectro.



reass. spectro.



Hermite



Bioacoustique

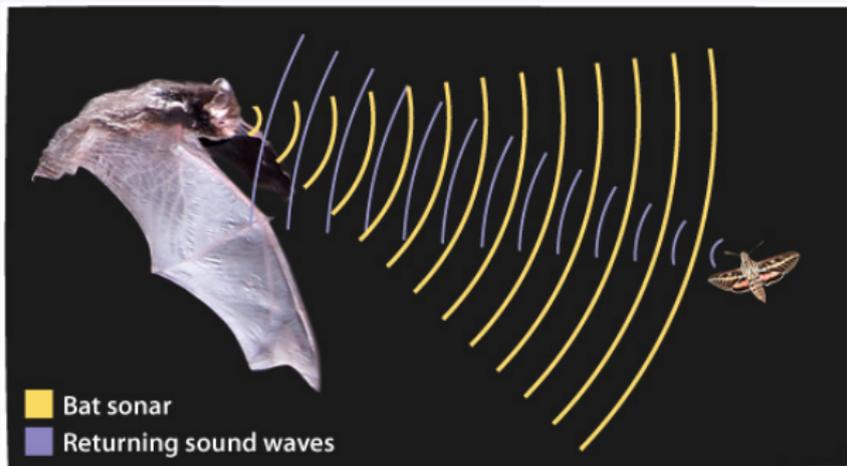


© Guy Deflandre

Système "sonar" animal

Observation [Spallanzani, 1794]

- navigation *sans vision*
- hypothèse d'un système actif : *écholocation*



@askabiologist.asu.edu/echolocation

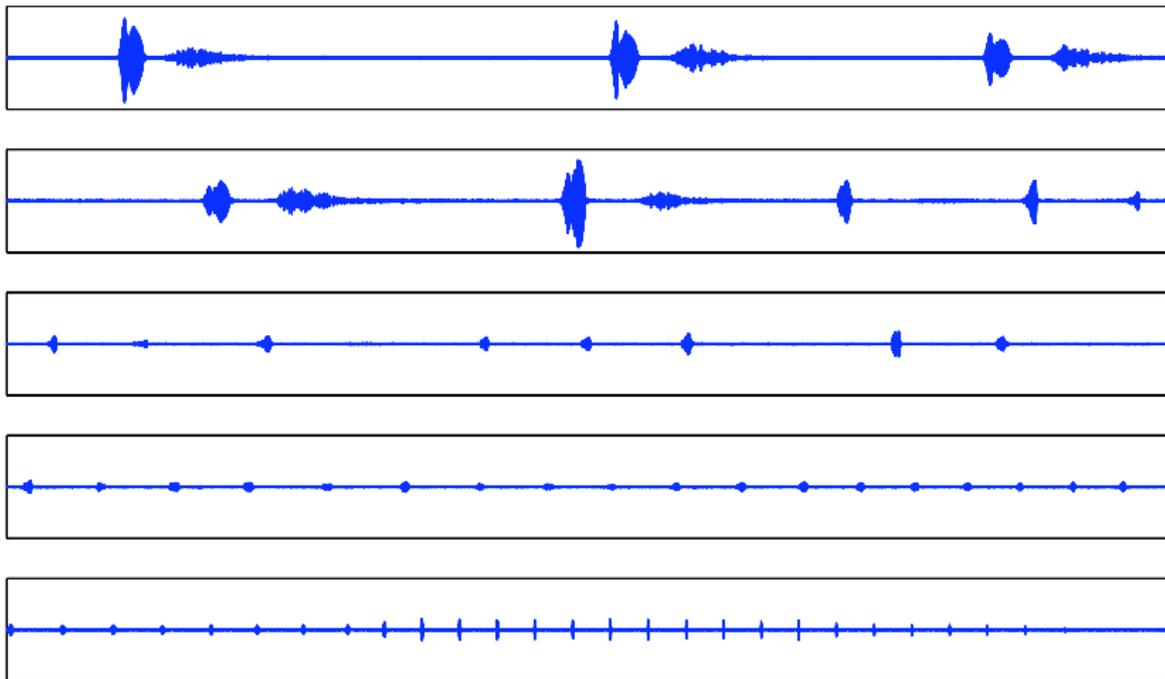
Système "sonar" animal

Confirmation [Griffin & Pierce, 1938]

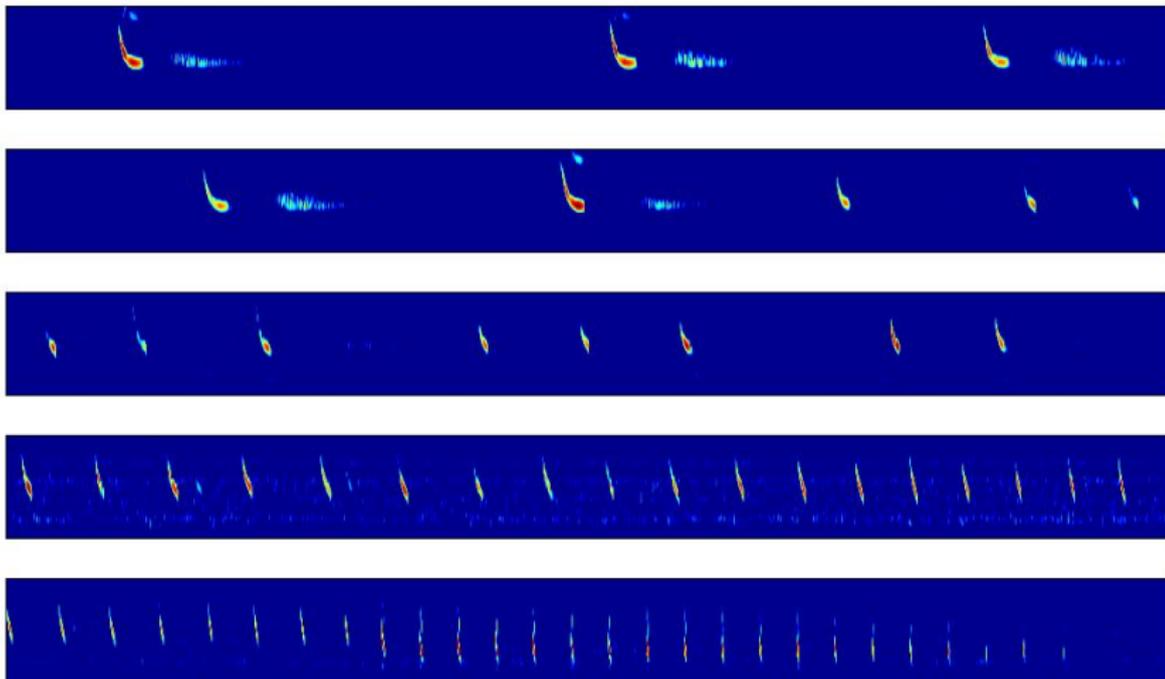
- navigation *acoustique*
- ondes *ultrasonores*, brèves (quelques millisecondes) et large bande (entre 40 et 100kHz)

exemple d'une séquence de poursuite (ralentie 32x)

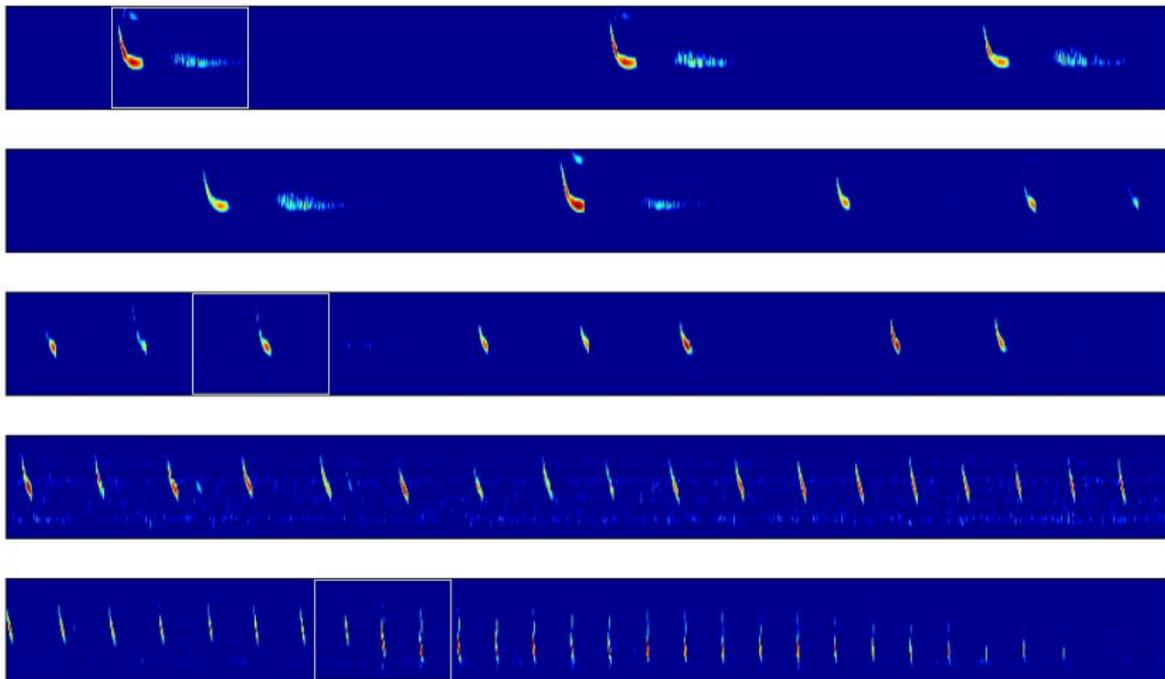
Une séquence de poursuite (*Myotis mystacinus*)



Une séquence de poursuite (*Myotis mystacinus*)



Une séquence de poursuite (*Myotis mystacinus*)

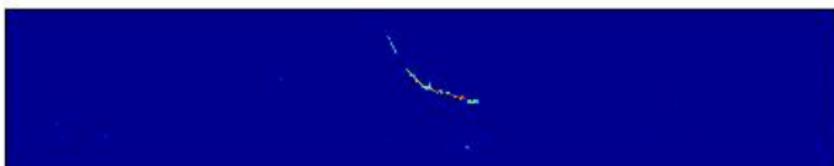


Zoom (spectrogramme réalloué)

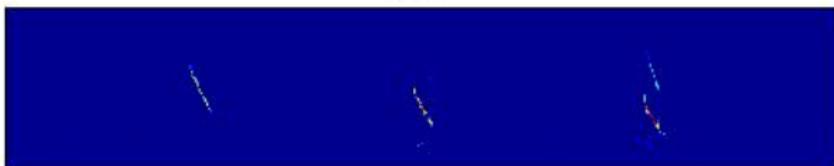
cruise



pursuit



catch



Chauve-souris et traitement du signal

Objectif

Comprendre la **conception de signal** des cris d'écholocation :

- 1 évolution à l'intérieur d'une séquence ?
- 2 adaptation à l'environnement ?
- 3 optimalité ?
- 4 ...

Un résultat classique

Pour un signal émis de durée T et de largeur de bande B , la précision dans l'estimation du décalage Doppler et du retard d'un écho est contrôlée par $\delta f \sim T^{-1}$ et $\delta t \sim (B \sqrt{SNR})^{-1}$ (formule de Woodward)

Chauve-souris et traitement du signal

Observation et interprétation

- 1 **Veille** — Importance d'estimer à la fois la distance (retard) et la vitesse (Doppler)
⇒ chirp **large bande** + fréquence constante
- 2 **Poursuite** — Importance d'estimer la distance quel que soit le Doppler
⇒ chirp adapté + **suppression progressive** de la fréquence constante
- 3 **Capture** — Importance de localisation précise sous contraintes physiologiques
⇒ augmentation de la bande effective en **abaissant** le fondamental et en augmentant la **distorsion harmonique**

Détection/estimation

Formulation temps-fréquence

- 1 **Filtrage adapté** — Signal émis $s(t)$ utilisé comme référence + écho $e(t)$ modélisé comme une copie de $s(t)$, retardée de τ et noyée dans un bcbg
 $\Rightarrow \hat{\tau} = \arg \max_{\tau} |\langle e, \mathbf{T}_{\tau} s \rangle|^2$
- 2 **Unitarité** — **Équivalence** isométrique des produits scalaires (formule de Moyal)
 $\Rightarrow |\langle x, y \rangle|^2 = \iint \rho_x(t, f) \rho_y(t, f) dt d\omega / 2\pi$
- 3 **Localisation** — Énergie concentrée le long de la fréquence instantanée $\omega_s(t)$
 $\Rightarrow \hat{\tau} = \arg \max_{\tau} \int a_s^2(t - \tau) \rho_e(t, \omega_s(t - \tau)) dt$
intégration de chemin dans le plan temps-fréquence

Détection par intégration de chemin

Tolérance Doppler

Solution

Erreurs **couplées** dans l'estimation conjointe du retard et du Doppler (autre forme de l'incertitude temps-fréquence)

Principe [Altes & Titlebaum, '70]

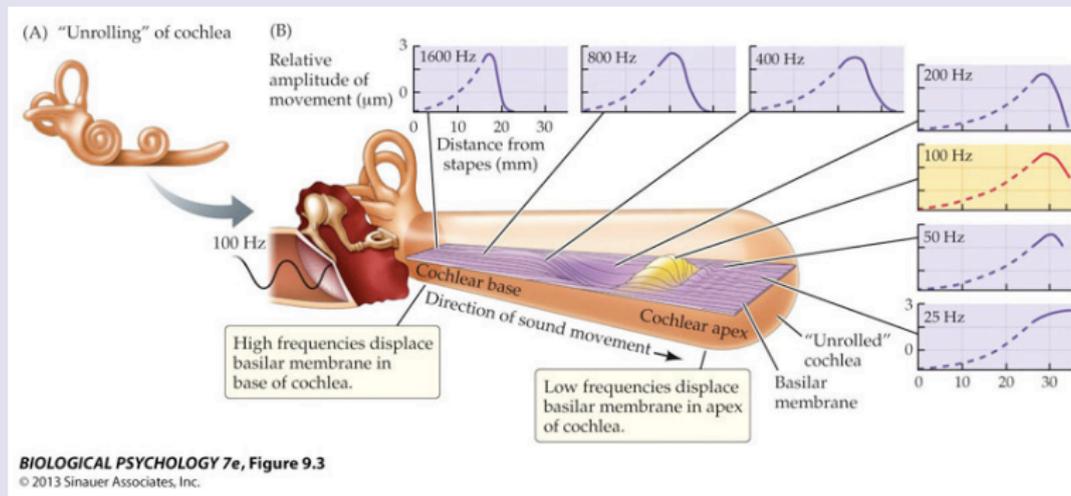
- Un signal est dit **tolérant Doppler** s'il permet une estimation non biaisée du retard quel que soit le Doppler (inconnu)
- Pour les signaux large bande, le Doppler est en fait une **dilatation/compression** (décalage = approximation pour les signaux à bande étroite)
- Solution analytique = chirps **hyperboliques**

Doppler tolerance

solution graphique

Un substrat physiologique ?

La cochlée des mammifères comme banc de filtres



- Ligne à retard **dispersive**
- Organisation **"tonotopique"**
- Information **temps-fréquence**

Astrophysique



© EGO - Virgo / CNRS Photothèque

Le défi

Quoi ?

Établir la première preuve **directe** sur Terre de l'existence des **ondes gravitationnelles** prédites par la relativité générale

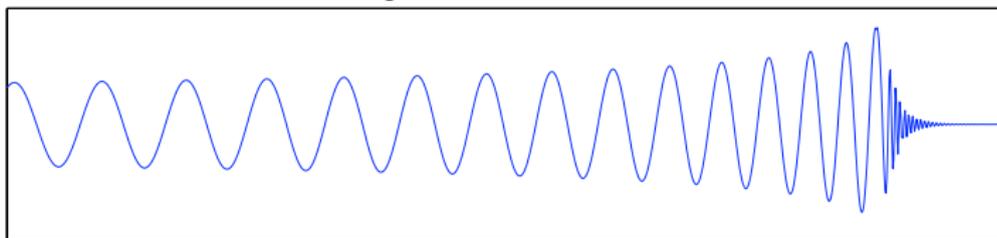
Comment ?

- **Projets** — VIRGO (France-Italie) + LIGO (USA) : **interféromètres** de Michelson géants (bras d'environ 3 km)
- **Mesures** — Passage d'une onde = modification locale de l'espace-temps \Rightarrow variation différentielle de la longueur des bras \Rightarrow **franges d'interférence**
- **Difficultés** — Signaux **très faibles** ne pouvant être observés que dans une fenêtre fréquentielle au-dessus de ~ 10 Hz (bruit sismique) et en-dessous de ~ 1 kHz (bruit de photons)

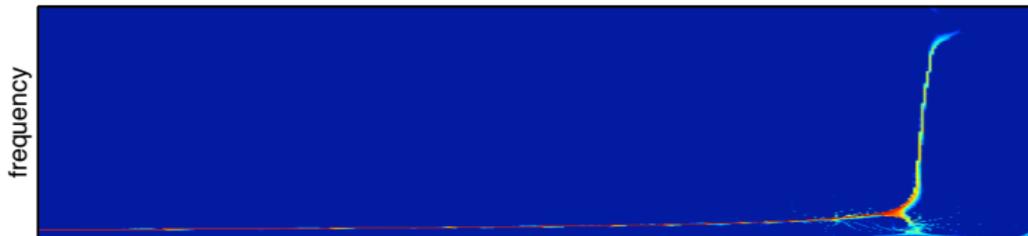
“Binaires coalescentes”

Forme d'onde attendue

gravitational wave



time



time

Détection/estimation

Modèle

La *partie spiralante* de l'onde émise par une binaire coalescente faite de deux objets de masses respectives m_1 et m_2 peut être modélisée par un *chirp en loi de puissance*

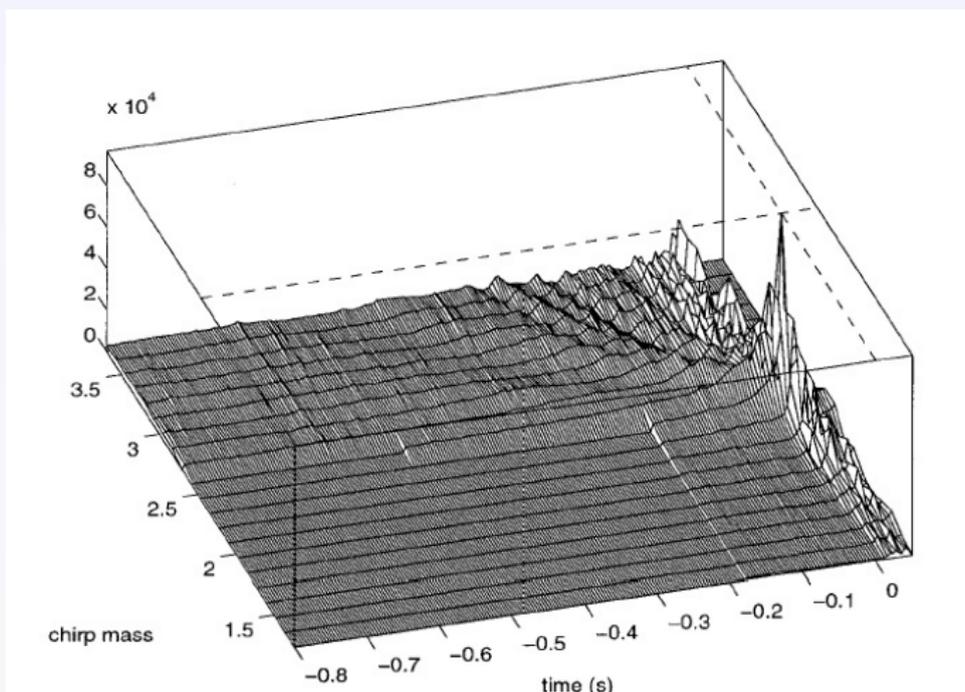
$$C_{\alpha,\beta}(t) = a(t_c - t)^\alpha \exp\{i(b(t_c - t)^\beta + c)\} U(t_c - t),$$

avec $(\alpha, \beta) = (-1/4, 5/8)$

Paramètres

- 1 l'**instant de coalescence** t_c
- 2 la "**chirp mass**" $\mathcal{M} = (m_1 + m_2)^{2/5}(m_1^{-1} + m_2^{-1})^{-3/5}$, liée au "chirp rate" b par $b \approx 38.6 (\mathcal{M}/M_\odot)^{-5/8}$, où M_\odot représente la masse solaire

Batterie de filtres adaptés temps-fréquence



(Chassande-Mottin & F., *ACHA '98*)

Acquis

- possibilité de décrire **conjointement** le temps et la fréquence
- donner un sens **opérationnel** à la notion intuitive de “fréquence instantanée”
- ... dans la limite des contraintes d'**incertitude**

En cours

- généraliser **au-delà des signaux** (images, graphes)
- prendre en compte d'autres propriétés (comme la **causalité**)
- adapter la notion de fréquence à des **oscillations** pas nécessairement harmoniques
- passer à des approches **pilotées par les données**
- ...

“Je cherche en même temps l'éternel et l'éphémère”

Georges Perec